limitée par $C_{f^{-1}}$, $\Delta_1' : y = 0, \Delta_2 : x = \alpha$ et $\Delta_3 : x = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

On a $\mathcal{A}r(D') = \mathcal{A}r(OAB) - \mathcal{A}r(D'') = \frac{\alpha^2}{2} - \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\alpha} g(x)dx = \frac{\alpha^2}{2} - I$

$$\Rightarrow \mathcal{A}r(K) = \alpha^2 - 2I = \alpha^2 - 2\left[\alpha^2 - \frac{1}{2}\text{Log}\left(\frac{1+\alpha}{1-\alpha}\right) + \text{Log}\left(\sqrt{2}+1\right)\right]$$

$$= \text{Log}\left(\frac{1+\alpha}{1-\alpha}\right) - \alpha^2 - 2\text{Log}\left(\sqrt{2}+1\right).$$

$\mathcal{A}r(K)$ est exprimé en unité d'aire.

3/a- • $u_0 = 0 \in [0;\alpha]$ donc la proposition est vraie pour $n = 0$

∗ Soit p un entier ,supposons que $0 \le u_p \le \alpha$; montrons que $0 \le u_{p+1} \le \alpha$. En effet

$0 \le u_p \le \alpha \Leftrightarrow f(0) \le f(u_p) \le f(\alpha)$ car f ↗ sur IR

$\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \le u_{p+1} \le \alpha$ car $f(\alpha) = \alpha$

d'où $0 \le u_{p+1} \le \alpha$ car $0 < \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Bilan : • et ∗ $\overset{th}{\Rightarrow} \forall n \in IN; 0 \le u_n \le \alpha$.

b- $\forall n \in IN; u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n = \varphi(u_n)$

Or $u_n \le \alpha \Rightarrow \varphi(u_n) \ge \varphi(\alpha) = 0$ car φ ↘ sur IR.

$\Rightarrow \forall n \in IN; u_{n+1} - u_n \ge 0$

$\Leftrightarrow (u_n)$ est croissante sur IN.

⊕ (u_n) est croissante sur IN et majorée par $\alpha \Rightarrow (u_n)$ converge.

⊗ Posons $L = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

Comme $u_{n+1} = f(u_n)$ et f est continue sur IR par suite en L

$\overset{th}{\Rightarrow} f(L) = L \Leftrightarrow \varphi(L) = 0 \Leftrightarrow \underline{L = \alpha}$.

(car l'équaton $\varphi(x) = 0$ possède une seule solution qui est α)

c- $\forall n \in IN; v_n = \frac{1}{\alpha - u_n}\int_{u_n}^{\alpha} f(x)dx$ est la valeur moyenne de f sur $[u_n, \alpha]$

$\overset{th}{\Rightarrow} \forall n \in IN; f(u_n) \le v_n \le f(\alpha) = \alpha$ car f est ↗ sur IR

$\Leftrightarrow \forall n \in IN; u_{n+1} \le v_n \le \alpha$.

• $\forall n \in IN; u_{n+1} \le v_n \le \alpha$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = \alpha$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \alpha$.

III/ 1/a- $\forall x \in]-1;1[$ (domaine de définition de F) on a :

• $(-x) \in]-1;1[$

•• $F(-0) = F(0)$

••• Pour $x \neq 0; F(-x) = \int_0^{\frac{1}{2}\text{Log}\left(\frac{(-x)^2}{1-(-x)^2}\right)} f(t)dt$

$$= \int_0^{\frac{1}{2}\text{Log}\left(\frac{x^2}{1-x^2}\right)} f(t)dt = F(x)$$

D'où **F est une** fonction paire.

b- Soit **Ψ une** primitive de f sur IR. On a donc $F(x) = \Psi(g(x)) - \Psi(0)$